Bab 3

Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri



Sumber: www.shutterstock.com

3.1 Kemiringan (Gradien) Garis Singgung dan Persamaan Garis Singgung pada Kurva Fungsi Trigonometri

Pada buku Jilid 2B Kelompok Wajib, kita telah membahas tentang kemiringan (gradien) garis singgung, persamaan garis singgung, dan persamaan garis normal kurva pada fungsi aljabar. Dalam pasal ini kita akan membahasnya kembali, tetapi kurvanya berbentuk fungsi trigonometri.

3.1.1 Kemiringan (Gradien) Garis Singgung pada Kurva Fungsi Trigonometri

Dalam pembahasan notasi turunan telah dibicarakan mengenai arti geometri dari turunan fungsi $f(x)$ di suatu titik, yaitu:

$$f'(x_1) = m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

dengan f(x) merupakan fungsi trigonometri dan m = kemiringan (gradien) garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(x_1, f(x_1))$ untuk absis = x_1 dan ordinat = $f(x_1)$.

Contoh: Mencermati penentuan nilai kemiringan (gradien) garis singgung kurva

Hitunglah nilai kemiringan (gradien) garis singgung pada masing-masing kurva fungsi berikut.

a. $f(x) = \sin x$ di absis $x = \frac{\pi}{6}$

b. $g(x) = \cos x$ di absis $x = \frac{\pi}{6}$

c. $h(x) = \tan x$ di absis $x = \frac{\pi}{4}$

Pembahasan:

a. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$

$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, nilai kemiringan (gradien) garis singgung pada kurva $f(x) = \sin x$ sebesar $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

b. $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$ dengan $x = \frac{\pi}{6}$

$m = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$m = -\frac{1}{2}$

Jadi, nilai kemiringan (gradien) garis singgung pada kurva $g(x) = \cos x$ sebesar $-\frac{1}{2}$.

c. $h(x) = \tan x \Rightarrow h'(x) = \sec^2 x$ dengan $x = \frac{\pi}{4}$.

$m = h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$

Jadi, nilai kemiringan (gradien) garis singgung pada kurva $h(x) = \tan x$ sebesar 2.



Contoh: Memahami penentuan nilai gradien garis singgung (garis tangen) kurva

Hitunglah nilai gradien garis tangen kurva fungsi berikut..

a. $f(\theta) = cotan\,\theta - 2\,cosec\,\theta, untuk\ \theta = \frac{\pi}{3}$ b. $g(t) = t \sec t$ di titik $(0, 0)$

Pembahasan:

a. $f(\theta) = \text{cotan}\ \theta - 2\ \text{cosec}\ \theta$, maka:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\text{cotan}\ \theta - 2\ \text{cosec}\ \theta)$$

$$= -\text{cosec}^2\ \theta - 2(-\text{cosec}\ \theta\ \text{cotan}\ \theta)$$

$$= -\text{cosec}^2\ \theta + 2\ \text{cosec}\ \theta\ \text{cotan}\ \theta$$

$$= -\frac{1}{\sin^2\theta} + 2\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}(-1 + 2\cos\theta)$$

$$m = \frac{df\left(\frac{\pi}{3}\right)}{d\theta} = \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3}}\right)\left(-1 + 2\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{3}}\right)(-1 + 1) = 0$$

Jadi, nilai gradien adalah 0.

b. $g(t) = t \sec t$, maka:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \sec t + t \sec t \tan t$$

$$= \frac{1}{\cos t}\left(1 + t \cdot \frac{\sin t}{\cos t}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 t}(\cos t + t \sin t)$$

$$m = \frac{dg(0)}{dt} = \frac{1}{\cos^2 0}(\cos 0 + 0 \cdot \sin 0) = 1$$

Jadi, nilai gradien adalah 1.



Anda dapat menguji pemahaman tentang Kemiringan (Gradien) Garis Singgung pada Kurva Fungsi Trigonometri dengan mengerjakan soal LKS 1 (halaman 120–121).

3.1.2 Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal Sebuah Kurva $y = f(x)$ di Titik $A(x_1, y_1)$

Persamaan garis singgung suatu kurva dan garis normal suatu kurva berpedoman pada persamaan garis lurus, yaitu sebagai berikut.

(i) Persamaan garis lurus yang bergradien m dan melalui titik $A(x_1, y_1)$, ditentukan oleh:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(ii) Persamaan garis lurus melalui sebuah titik $A(x_1, y_1)$ dan tegak lurus terhadap garis:

- $Ax + By + C = 0$, $m_1 = -\frac{A}{B}$, ditentukan oleh:

  $m_2 \cdot m_1 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{B}{A}$ dan

  $y - y_1 = m_2(x - x_1)$ atau $y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$

- $y = Ax + B \Rightarrow m_1 = A$ dan $m_2 = -\frac{1}{A}$, ditentukan oleh:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1) \text{ atau } y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1)$$

(iii) Penentuan persamaan garis singgung (*tangent line*) dan garis normal (*normal line*) pada kurva $y = f(x)$ di titik $A(x_1, y_1)$.

Kurva $\equiv y = f(x)$ dengan gradien $m = f'(x_1)$, mempunyai:

a. persamaan garis singgung (tangent line) kurva, ditentukan oleh:

$$y - y_1 = f'(x_1)\ (x - x_1)$$

b. persamaan garis normal (normal line) kurva, ditentukan oleh:

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

Keadaan (a) dan (b) menunjukkan bahwa garis singgung kurva selalu tegak lurus terhadap garis normal kurva tersebut.

Contoh: Memahami penentuan persamaan garis singgung dan persamaan garis normal kurva fungsi aljabar

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal dari kurva $y = 4x^2 + 2x - 1$ pada titik yang berabsis $x = \frac{1}{2}$.

Pembahasan:

Model matematika dari soal adalah:

(i) kurva $\equiv y = 4x^2 + 2x - 1$

(ii) absis $\equiv x = \frac{1}{2}$

(iii) ordinat $\equiv y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1$

(iv) titik singgung $= \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

(v) gradien $\equiv y' = 8x + 2 \Rightarrow y' = 8\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 6 \Rightarrow m = 6$

- Persamaan garis singgung $\equiv y - 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$y - 1 = 6x - 3$$
$$y = 6x - 2 \text{ atau}$$
$$6x - y - 2 = 0$$

Jadi, persamaan garis singgung kurva adalah $y = 6x - 2$ atau $6x - y - 2 = 0$.

- Persamaan garis normal $\equiv y - 1 = -\frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{12} \text{ atau}$$
$$2x + 12y - 13 = 0$$

Jadi, persamaan garis normal kurva adalah $y = -\frac{1}{6}x + \frac{13}{12}$ atau $2x + 12y - 13 = 0$.



Anda dapat menguji pemahaman tentang Persamaan Garis Singgung dan Garis Normal Sebuah Kurva $y = f(x)$ di Titik $A(x_1, y_1)$ dengan mengerjakan soal LKS 2 (halaman 125–128).

3.2 Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Fungsi

Pada Bab 9 buku Jilid 2B Kelas XI Kelompok Wajib, kita telah membahas tentang nilai maksimum dan minimum fungsi dengan pendekatan saintifik turunan pertama. Dalam subbab ini, kita akan mengembangkan penentuan nilai maksimum dan minimum fungsi (aljabar dan trigonometri) yang melibatkan turunan kedua fungsi tersebut.

3.2.1 Prinsip Dasar Penentuan Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi

Penentuan nilai maksimum dan nilai minimum suatu fungsi berdasarkan turunan kedua fungsi tersebut mengikuti kaidah berikut.

Diberikan $y = f(x)$, $f'(x)$, dan $f''(x)$ terdefinisi pada domain fungsi tersebut. Tes turunan kedua fungsi itu sebagai berikut.

- Jika $f''(x) > 0$ saat $f'(x) = 0$, maka $f(x)$ adalah nilai minimum fungsi f.
- Jika $f''(x) < 0$ saat $f'(x) = 0$, maka $f(x)$ adalah nilai maksimum fungsi f.
- Jika $f''(x) = 0$ saat $f'(x) = 0$, berarti tes turunan kedua gagal dan harus menggunakan prinsip turunan pertama. Keadaan ketiga ini akan kita bahas lebih jelas pada subbab 3.3 selanjutnya.

Contoh: Memahami penentuan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi aljabar

Tentukan nilai maksimum, nilai minimum, dan pembuat nilai maksimum/minimum dari fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

Pembahasan:

Diketahui: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

Turunan pertama: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

Pembuat nilai maksimum dan minimum.

Syarat $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$ (kedua ruas dibagi 6)

$(x + 2)(x - 1) = 0$ (ruas kiri difaktorkan)

$x = -2$ atau $x = 1$

Turunan kedua: $f''(x) = 12x + 6$

Tes turunan kedua:

$x = -2 \Rightarrow f''(-2) = 12(-2) + 6 < 0$, berarti nilai maksimum fungsi f adalah

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 7$$
$$= -16 + 12 + 24 + 7$$
$$= 27$$

Jadi, nilai maksimum = 27.

$x = 1 \Rightarrow f''(1) = 12(1) + 6 = 18 > 0$, berarti nilai minimum fungsi f adalah

$$f(1) = 2(1^3) + 3(1^2) - 12(1) + 7$$
$$= 2 + 3 - 12 + 7$$
$$= 0$$

Jadi, nilai minimum = 0.

Contoh: Memahirkan penentuan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi aljabar

Tentukan nilai maksimum atau minimum kurva fungsi aljabar $g(x) = 27x + \frac{4}{x^2}$.

Pembahasan:

Diketahui: $g(x) = 27x + \frac{4}{x^2}$

$= 27x + 4x^{-2}$

Turunan pertama: $g'(x) = 27 + 4(-2)x^{-3} = 27 - \frac{8}{x^3}$

Pembuat nilai maksimum dan minimum didapat dari syarat:

$g'(x) = 0$

$27 - \frac{8}{x^3} = 0$

$\frac{8}{x^3} = 27$

$x^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

$x = \frac{2}{3}$

Turunan kedua: $g''(x) = 0 - 8(-3)x^{-4} = \frac{24}{x^4}$

Tes turunan kedua:

$g''\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{24}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$

$= 24 \cdot \frac{3^4}{2^4} = \frac{24 \cdot 81}{16} = 121\frac{1}{2}$

sehingga $g''\left(\frac{2}{3}\right) > 0$.

Nilai minimum fungsi $g(x)$ adalah $g\left(\frac{2}{3}\right)$, yaitu:

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 27\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

$= 18 + \frac{4}{\frac{4}{9}} = 18 + 9 = 27$

Jadi, nilai minimum fungsi $g(x)$ adalah 27.



Anda dapat menguji pemahaman tentang Persamaan Prinsip Dasar Penentuan Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi dengan mengerjakan soal LKS 3 (halaman 134–135).

3.2.2 Penerapan Masalah Maksimum dan Minimum

Berikut ini diberikan langkah-langkah pemecahan masalah maksimum-minimum.

(i) Tetapkan besaran yang harus dimaksimalkan atau diminimalkan. Besaran ini biasanya dilambangkan dengan huruf agar kita dapat dengan mudah menuliskan model matematika.

(ii) Tentukan formula untuk model matematika dari masalah yang dihadapi.

(iii) Terapkan metode maksimum-minimum di interval tertutup.

(iv) Berikan tafsiran terhadap hasil yang diperoleh pada langkah (iii) yang disesuaikan dengan masalah semula agar ketelitian dari jawaban lebih akurat dan benar.

Contoh: Mencermati penyelesaian masalah maksimum atau minimum

Keliling suatu persegi panjang adalah 100 m. Tentukanlah ukuran persegi panjang itu agar luasnya maksimum.

(*Model soal UN/UNBK*)

Pembahasan:

Jika lebar persegi panjang x meter dan panjang y meter, maka $y = \frac{1}{2}(100 - 2x)$.

Jelas bahwa $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, maka $\frac{1}{2}(100 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 50 - x \geq 0$

Jadi, $0 \leq x \leq 50$.

Luas persegi panjang dalam m^2 adalah

$$L(x) = x \cdot \tfrac{1}{2}(100 - 2x) = 50x - x^2$$

Akan dicari nilai maksimum L:

$$L'(x) = 50 - 2x \Rightarrow L''(x) = -2 < 0.$$

Nilai maksimum L didapat jika $L'(x) = 0$

$$\begin{aligned} L'(x) = 0 &\Leftrightarrow 50 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 50 \\ &\Leftrightarrow x = 25 \end{aligned}$$

$$L(25) = 50 \cdot 25 - (25)^2 = 625$$

Pada ujung interval $0 \leq x \leq 50$, $L(0) = 0$, dan $L(50) = 50 \cdot 50 - (50)^2 = 0$.

Jadi, luas maksimum adalah 625 m^2 yang diperoleh jika lebarnya 25 m dan panjangnya 25 m.

Cara siswa kreatif

Persoalan ini dapat dianggap persegi panjang sebagai persegi agar luasnya maksimum.

Keliling = $4s = 100$

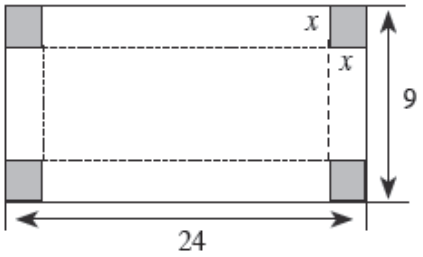
$$s = \frac{100}{4} = 25$$

Jadi, panjang = lebar = 25 m.

Contoh: Memahami penyelesaian masalah maksimum atau minimum

Kotak segi empat dibuat dari selembar karton dengan panjang 24 cm dan lebar 9 cm dengan cara memotong persegi identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya. Tentukan ukuran kotak agar volumenya maksimum dan berapa volume kotak itu?

(*Model soal UN/UNBK*)



Pembahasan:

Misalkan x = sisi persegi yang harus dipotong dan V = volume kotak yang terjadi. Jadi:

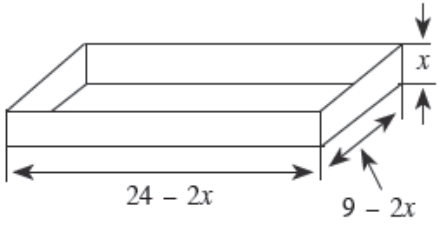
$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Terlihat bahwa $x \in \left[0, \frac{9}{2}\right]$. Hal ini berarti, masalah kita adalah memaksimumkan V pada interval $\left[0, \frac{9}{2}\right]$.

Penentuan pembuat nilai maksimum ditetapkan berdasarkan $\frac{dV}{dx} = 0$, diperoleh:

$$216 - 132x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

$x = 2$ dan $x = 9$, tetapi $x = 9$ tidak dalam interval $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, berarti kita mempunyai tiga pembuat nilai maksimum atau minimum, yaitu 0, 2, dan $\frac{9}{2}$.



Penentuan pembuat nilai maksimum ditetapkan berdasarkan $\frac{dV}{dx} = 0$, diperoleh:

$$216 - 132x + 12x^2 = 0 \Rightarrow 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

$x = 2$ dan $x = 9$, tetapi $x = 9$ tidak dalam interval $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, berarti kita mempunyai tiga pembuat nilai maksimum atau minimum, yaitu 0, 2, dan $\frac{9}{2}$.

Turunan pertama:

$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2$$

Turunan kedua:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -132 + 24x$$

Tes turunan kedua:

- $x = 0 \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -132 + 0 < 0$,

  tapi ukuran rusuk tidak pernah nol (tidak digunakan)

- $x = 2 \Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -132 + 48 < 0$

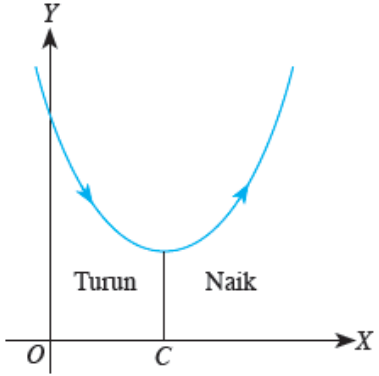
Volume maksimum diperoleh dari tinggi = $x = 2$, lebar = $9 - 2x = 5$, dan panjang = $24 - 2x = 24 - 4 = 20$ dengan volume maksimum kotak tersebut = $2 \cdot 5 \cdot 20 = 200$ cm^3.



Anda dapat menguji pemahaman tentang Penerapan Masalah Maksimum dan Minimum dengan mengerjakan soal LKS 4 (halaman 140–144).

3.3 Selang Kemonotonan dan Kecekungan Kurva Sebuah Fungsi

Perhatikan grafik pada Gambar 3.1. Terlihat bahwa kurva fungsi f turun di kiri C $(0 \leq x \leq C)$ dan naik di kanan C $(x > C)$. Berdasarkan hal di atas, dapat kita definisikan sebagai berikut.



Gambar 3.1

Definisi

Anggap f terdefinisi pada selang I (terbuka, tertutup, atau tak satupun), dapat dikatakan bahwa:

a. f naik pada I, jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I

b. f turun pada I, jika untuk setiap pasangan bilangan x_1 dan x_2 dalam I

c. f monoton murni pada I jika f naik pada I atau turun pada I

3.3.1 Turunan Pertama dan Kemonotonan

Pada subbab 3.1 telah dibahas kurva fungsi $f(x)$ dengan turunan pertama $f'(x)$ memberi gambaran tentang kemiringan (gradien) dari garis singgung kurva fungsi $f(x)$ di titik x. Pada subbab ini kita akan membahas tentang kurva fungsi naik, turun, dan diam (stasioner) sebagai teorema kemonotonan.

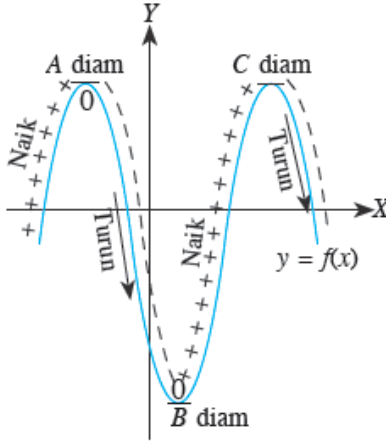
A. Kurva fungsi naik, turun, dan diam (stasioner)

Kurva sebuah fungsi ditinjau dari turunan pertama $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ = gradien (m) pada nilai x di interval tertentu dapat berupa sebagai berikut.

(i) $f'(x)$ bertanda positif ($f'(x) > 0$), maka kurva fungsi dalam keadaan naik disebut fungsi naik.

(ii) $f'(x)$ bertanda negatif ($f'(x) < 0$), maka kurva fungsi dalam keadaan turun disebut fungsi turun.

(iii) $f'(x)$ bertanda netral ($f'(x) = 0$), maka kurva fungsi dalam keadaan diam disebut fungsi diam atau fungsi tidak naik dan tidak turun atau fungsi stasioner.



Gambar 3.2

Catatan:
Tanda-tanda: +, –, dan nol menunjukkan perubahan nilai-nilai turunan fungsi $f(x)$.

Kondisi suatu fungsi $y = f(x)$ dalam keadaan naik, turun, atau diam

Diberikan fungsi $y = f(x)$ dalam interval I dengan $f(x)$ diferensiabel pada setiap x di dalam interval I.

(1) Jika $f'(x) > 0$ untuk $x \in I$, maka kurva $f(x)$ selalu naik pada interval I.

(2) Jika $f'(x) < 0$ untuk $x \in I$, maka kurva f(x) selalu turun pada interval I.

(3) Jika $f'(x) = 0$ untuk $x \in I$, maka kurva $f(x)$ stasioner pada interval I.

(4) Jika $f'(x) \geq 0$ untuk $x \in I$, maka kurva $f(x)$ tidak pernah turun pada interval I.

(5) Jika $f'(x) \leq 0$ untuk $x \in I$, maka kurva $f(x)$ tidak pernah naik pada interval I.

Contoh: Memahami penentuan selang/interval kemonotonan kurva sebuah fungsi

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, tentukan interval x agar kurva fungsi $f(x)$
a. selalu naik,
b. selalu turun.

Pembahasan:

Diberikan $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, maka $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

a. Kurva fungsi $f(x)$ selalu naik, berarti $f'(x) > 0$.

$3x^2 - 12x + 9 > 0$

$x^2 - 4x + 3 > 0$ (kedua ruas dibagi 3)

$(x - 1)(x - 3) > 0$

$x < 1$ atau $x > 3$

Jadi, interval x agar kurva $f(x)$ selalu naik adalah $x < 1$ atau $x > 3$.

b. Kurva fungsi $f(x)$ selalu turun, berarti $f'(x) < 0$.

$3x^2 - 12x + 9 < 0$

$x^2 - 4x + 3 < 0$ (kedua ruas dibagi 3)

$(x - 1)(x - 3) < 0$

$1 < x < 3$

Jadi, interval x agar kurva $f(x)$ selalu turun adalah $1 < x < 3$.

Contoh: Memantapkan penentuan interval kemonotonan kurva sebuah fungsi

Temukan di mana kurva fungsi g dengan $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ dalam keadaan naik dan keadaan turun.

Pembahasan:

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

Tinjauan $g'(x)$:

Pembuat nol $g'(x)$, yaitu:

$(1 + x)(1 - x) = 0$

$1 + x = 0$ atau $1 - x = 0$

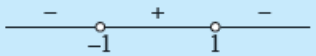
$x = -1$ atau $x = 1$

Berdasarkan garis bilangan di samping, diperoleh:

$g'(x) < 0$ pada interval $x < -1$ atau $x > 1$, maka kurva fungsi g turun di interval tersebut. Adapun $g'(x) > 0$ pada interval $-1 \le x \le 1$, maka kurva fungsi g naik pada interval tersebut.

Garis Bilangan

Nilai-nilai $g'(x)$:





Anda dapat menguji pemahaman tentang Turunan Pertama dan Kemonotonandengan mengerjakan soal LKS 5 (halaman 150–151).

B. Titik stasioner dan titik ekstrim (optimum) kurva sebuah fungsi

Penentuan jenis ekstrim kurva sebuah fungsi dapat dilakukan dengan uji turunan pertama sebagai berikut.

Jika $f'(c) = 0$, maka $f(c)$ adalah nilai stasioner f pada $x = c$. Nilai stasioner mungkin berupa nilai balik maksimum, nilai balik minimum, atau titik belok horizontal pada grafi k f. Jenis nilai-nilai stasioner ini dapat ditentukan dengan memperhatikan tanda $f'(x)$ di sekitar $x = c$.

(i) $f(x)$ mempunyai *nilai balik maksimum* $f(c)$ jika $f'(x)$ berganti tanda dari positif menjadi negatif saat melalui nol.

(ii) $f(x)$ mempunyai *nilai balik minimum* $f(c)$ jika $f'(x)$ berganti tanda dari negatif menjadi positif saat melalui nol.

(iii) $f(x)$ mempunyai *titik belok horizontal* pada c jika $f'(x)$ tidak berganti tanda saat melalui nol.

Contoh: Mencermati penentuan nilai dan titik stasioner kurva sebuah fungsi

Tentukan nilai stasioner dan koordinat titik stasioner fungsi:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8.$$

Pembahasan:

Diberikan $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$ maka $f'(x) = x^2 + x - 6$.

Nilai-nilai stasioner f didapat jika $f'(x) = 0$.

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x + 3)(x - 2) = 0$$
$$x = -3 \text{ atau } x = 2$$

- Untuk $x = -3$, nilai stasionernya:

  $f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) + 8 = 21\frac{1}{2}$

  Titik stasionernya adalah $\left(-3, 21\frac{1}{2}\right)$.

- Untuk $x = 2$, nilai stasionernya:

  $f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) + 8 = \frac{2}{3}$

  Titik stasionernya adalah $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

Jadi, fungsi f mempunyai nilai-nilai stasioner $f(-3) = 21\frac{1}{2}$ dan $f(2) = \frac{2}{3}$ serta titik-titik stasioner $\left(-3, 21\frac{1}{2}\right)$ dan $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

Contoh: Memahami penentuan absis titik stasioner kurva fungsi trigonometri

Diberikan kurva dengan persamaan $y = 2\sin x + \cos x$ untuk $0 \leq x \leq 2\pi$. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan nilai x pada titik stasioner kurva tersebut.

Pembahasan:

kurva $\equiv y = 2\sin x + \cos x$

Turunan $\equiv \frac{dy}{dx} = 2\cos x - \sin x$

Syarat stasioner (diam) $\equiv \frac{dy}{dx} = 0$

$$2\cos x - \sin x = 0$$
$$\sin x = 2\cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = 2$$
$$\tan x = 2$$
$$x = \tan^{-1}(2)$$

$x = 1{,}11$ dan $x = 4{,}25$

Jadi, nilai x adalah 1,11 dan 4,25.



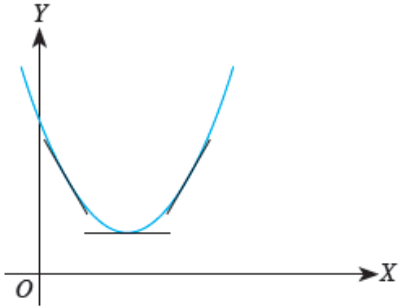
Anda dapat menguji pemahaman tentang Titik stasioner dan titik ekstrim (optimum) kurva sebuah fungsi dengan mengerjakan soal LKS 6 (halaman 155–157).

3.3.2 Turunan Kedua dan Kecekungan Kurva Sebuah Fungsi

Definisi: Kecekungan kurva sebuah fungsi

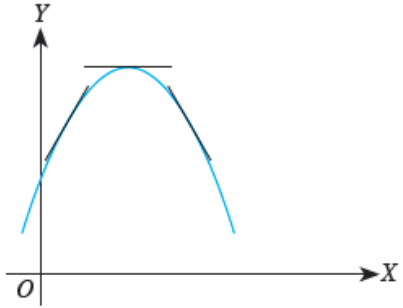
Anggap fungsi f diferensiabel pada selang/interval terbuka I. Kurva fungsi f cekung ke atas pada interval I jika f' naik pada I dan sebaliknya kurva fungsi f cekung ke bawah pada I jika f' turun pada I.

Berikut ini dilukiskan beberapa keadaan kecekungan kurva sebuah fungsi.



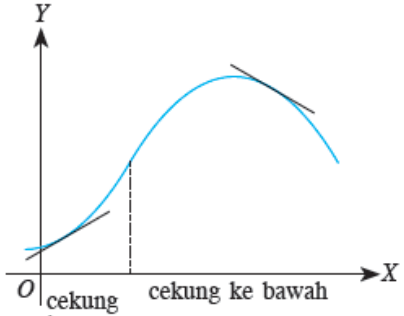
f' naik: cekung ke atas

(a)



f' turun: cekung ke bawah

(b)



(c)

A. Teorema kecekungan

Teorema kecekungan kurva fungsi f

Anggap fungsi f diferensiabel dua kali pada selang/interval terbuka I.

a. Jika $f''(x) > 0$, untuk semua x dalam I, maka kurva fungsi f cekung ke atas pada interval I.

b. Jika $f''(x) < 0$, untuk semua x dalam I, maka kurva fungsi f cekung ke bawah pada interval I.

B. Penentuan jenis nilai ekstrim/optimum kurva fungsi dengan uji turunan kedua

Uji turunan pada penentuan jenis ekstrim suatu fungsi

Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu dan diferensiabel dalam interval I yang memuat $x = c$. Turunan pertama $f'(x)$ dan turunan kedua $f''(x)$ pada interval I, serta $f'(c) = 0$ dengan $f(c)$ nilai stasioner.

(i) Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai balik maksimum fungsi f.

(ii) Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai balik minimum fungsi f.

(iii) Jika $f''(c) = 0$, maka $f(c)$ adalah bukan nilai ekstrim fungsi f dan titik $(c, f(c))$ adalah titik belok kurva fungsi $f(x)$.

Contoh: Memahami penentuan kecekungan kurva fungsi

Tentukan di mana kurva fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah.

Pembahasan:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

Turunan pertama: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

Turunan kedua : $f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$

- Penentuan fungsi f naik dan turun

  $f'(x) = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$

  $x = -1$ atau $x = 3$ (nilai stasioner)

  Fungsi f naik $\Leftrightarrow f'(x) > 0$

  $(x + 1)(x - 3) > 0$

  $x < -1$ atau $x > 3$

  Jadi, fungsi f naik pada interval/selang: $x < -1$ atau $x > 3$, dan dapat ditulis sebagai $(-\infty, -1)$ atau $(3, \infty)$.

  Fungsi f turun $\Leftrightarrow f'(x) < 0$

  $(x + 1)(x - 3) < 0$

  $-1 < x < 3$

  Jadi, fungsi f turun pada interval/selang: $-1 < x < 3$ dan dapat ditulis sebagai $(-1, 3)$.

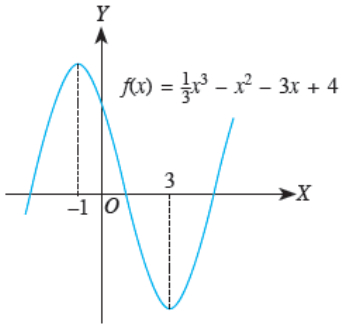
- Penentuan kecekungan kurva fungsi f

  $f''(x) > 0 \Rightarrow 2(x - 1) > 0 \Rightarrow x > 1$

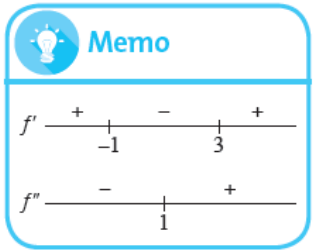
Jadi, kurva fungsi f cekung ke atas pada interval/selang: $x > 1$ dan dapat ditulis sebagai $(1, \infty)$.

$f''(x) < 0 \Rightarrow 2(x - 1) < 0 \Rightarrow x < 1$

Jadi, kurva fungsi f cekung ke bawah pada interval/selang: $x < 1$ dan dapat ditulis sebagai $(-\infty, 1)$, seperti terlihat pada gambar



Memo



Contoh: Memahami penentuan titik ekstrim/optimum kurva fungsi aljabar

Temukan titik ekstrim/optimum dari kurva fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ dengan uji turunan kedua.

Pembahasan:

Fungsi f: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

Turunan pertama:

$f'(x) = x^3 - x = x(x + 1)(x - 1)$

Nilai stasioner fungsi f, yaitu:

$f'(x) = 0$

$x(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = 0$, $x = -1$, atau $x = 1$

Turunan kedua:

$f''(x) = 3x^2 - 1$

Uji turunan kedua pada nilai-nilai stasioner, diperoleh:

- Untuk $x = -1$, maka

  $f''(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2 > 0$.

  Nilai balik minimum diperoleh dari $f(-1)$, yaitu:

  $f(-1) = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^2 = -\frac{1}{4}$

  dan titik balik minimum adalah $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$.

- Untuk $x = 0$, maka

  $f''(0) = 3(0^2) - 1 = -1 < 0$.

  Nilai balik maksimum diperoleh dari $f(0)$, yaitu:

  $f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$

  dan titik balik maksimum adalah (0, 0).

- Untuk $x = 1$, maka

  $f''(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2 > 0$.

  Nilai balik minimum diperoleh dari $f(1)$, yaitu:

  $f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = -\frac{1}{4}$

  dan titik balik minimum adalah $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$.



Anda dapat menguji pemahaman tentang Turunan Kedua dan Kecekungan Kurva Sebuah Fungsi dengan mengerjakan soal LKS 7 (halaman 163–164).