

BARISAN DAN DERET

KONSEP BARISAN DAN DERET

Pola Barisan dan Deret Bilangan

Kompetensi Dasar :

Menerapkan konsep barisan dan deret aritmatika

Indikator :

1. **Nilai suku ke- n suatu barisan aritmatika ditentukan menggunakan rumus**
2. **Jumlah n suku suatu deret aritmatika ditentukan dengan menggunakan rumus**

Pola Barisan dan Deret Bilangan





Saat mengendarai motor, pernahkah kalian mengamati speedometer pada motor tersebut?

Pada speedometer terdapat angka-angka 0,20, 40, 60, 80, 100, dan 120 yang menunjukkan kecepatan motor saat kalian mengendarainya. Angka-angka ini berurutan mulai dari yang terkecil ke yang terbesar dengan pola tertentu sehingga membentuk sebuah pola barisan

Pola Barisan dan Deret Bilangan

Bayangkan anda seorang penumpang taksi. Dia harus membayar biaya buka pintu Rp 15.000 dan argo Rp 2.500 /km.

Buka pintu	1 km	2 km	3 km	4 km
				
15.000	17.500	20.000	22.500	…….

Konsep Notasi Sigma

Perhatikan jumlah 6 bilangan ganjil pertama berikut:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ ……. (1)

Pada bentuk (1)

Suku ke-*1* = 1 = **2**.*1* – 1
Suku ke-*2* = 3 = **2**.*2* – 1
Suku ke-*3* = 5 = **2**.*3* – 1
Suku ke-*4* = 7 = **2**.*4* – 1
Suku ke-*5* = 9 = **2**.*5* – 1
Suku ke-*6* = 11 = **2**.*6* – 1

Secara umum suku ke-**k** pada (1) dapat dinyatakan dalam bentuk **2k** – 1, $k \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

NOTASI SIGMA

Dengan notasi sigma bentuk penjumlahan (1) dapat ditulis :

$$1+3+5+7+9+11=\sum_{k=1}^{6}(2k-1)$$

NOTASI SIGMA

Bentuk $\sum_{k=1}^{6}(2k-1)$ $\sum_{k=4}^{9}(2(k-3)-1)$ $\sum_{k=4}^{9}(2k-7)$

dibaca “sigma 2k – 1 dari k =1 sampai dengan 6”

atau “jumlah 2k – 1 untuk k = 1 sd k = 6”

1 disebut batas bawah dan

6 disebut batas atas,

k dinamakan indeks

(ada yang menyebut variabel)

NOTASI SIGMA

Secara umum

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

NOTASI SIGMA

Contoh:

Hitung nilai dari:

$$\sum_{k=1}^{4}(2k+1) = (2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+(2\cdot 3+1)+(2\cdot 4+1)$$

$$= 3+5+7+9 = 24$$

Nyatakan dalam bentuk sigma

1. $a + a^2b + a^3b^2 + a^4b^3 + \ \ldots \ + a^{10}b^9$

$$\sum_{k=1}^{10}(a^k b^{k-1})$$

NOTASI SIGMA

2. $(a + b)^n =$

$$a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + C_3^n a^{n-3} b^3 + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$\sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

NOTASI SIGMA

Sifat-sifat Notasi Sigma :

1. $\sum_{k=1}^{n} ak = a_1 + a_2 + a_3 ... + a_n.$
2. $\sum_{k=m}^{n} Cak = C\sum_{k=m}^{n} ak$
3. $\sum_{k=m}^{n} (ak + bk) = \sum_{k=m}^{n} ak + \sum_{k=m}^{n} bk$
4. $\sum_{k=m}^{n} ak \sum_{k=m+p}^{n+p} ak - p$
5. $\sum_{k=m}^{n} C = (n - m + 1)C$
6. $\sum_{k=m}^{p-1} ak + \sum_{k=p}^{n} ak = \sum_{k=m}^{n} ak$
7. $\sum_{k=m}^{m=1} ak = 0$, Untuk setiap bilangan bulat a, b dan n

NOTASI SIGMA

Contoh1:

Tunjukkan bahwa $\sum_{k=1}^{3}(4i+2) = \sum_{j=1}^{3}(4j+2)$

Jawab :

$$\sum_{i=1}^{3}(4i+2) = (4.1+2)+(4.2+2)+(4.3+3) = 30$$

$$\sum_{j=1}^{3}(4j+2) = (4.1+2)+(4.2+2)+(4.3+2) = 30$$

NOTASI SIGMA

Contoh 2 :

Hitung nilai dari $\sum_{k=1}^{3} 6k^2 + \sum_{k=4}^{6} 6k^2$

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{3} 6k^2 + \sum_{k=4}^{6} 6k^2 = \sum_{k=1}^{6} 6k^2 = 6\sum_{k=1}^{6} k^2$$

$= 6\ (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)$

$= 6\ (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)$

$= 6.91 = 546$

BARISAN DAN DERET ARITMATIKA

- Bilangan-bilangan berurutan seperti pada speedometer memiliki selisih yang sama untuk setiap dua suku berurutannya sehingga membentuk suatu barisan bilangan

- Barisan Aritmatika adalah suatu barisan dengan selisih (beda) dua suku yang berurutan selalu tetap

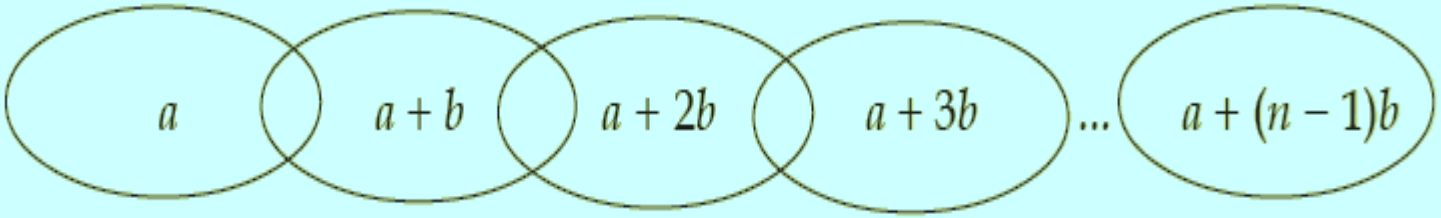
  Bentuk Umum :

  $U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots, \quad U_n$

  $a, \quad a + b, \; a + 2b, \ldots, \; a + (n-1)b$

Pada barisan aritmatika,berlaku $U_n - U_{n-1} = b$ sehingga $U_n = U_{n-1} + b$

Jika kalian memulai barisan aritmetika dengan suku pertama a dan beda b maka kalian mendapatkan barisan berikut.



Suku ke-n barisan aritmetika adalah $U_n = a + (n-1)b$
di mana U_n = Suku ke-n
a = Suku pertama
b = beda
n = banyaknya suku

$$U_n = a + (n-1)b$$

Jika setiap suku barisan aritmetika dijumlahkan, maka diperoleh **deret aritmetika**.

Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku dari barisan aritmetika.
Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \text{ atau}$$
$$a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$$

Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b] \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

di mana S_n = Jumlah suku ke-n
n = banyaknya suku
a = Suku pertama
b = Beda
U_n = Suku ke-n

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)b]$$

Diketahui barisan 5, −2, −9, −16, …, tentukanlah:

a. rumus suku ke-n

b. suku ke-25

Jawab:

Selisih dua suku berurutan pada barisan 5, −2, −9, −16, … adalah tetap, yaitu $b = -7$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika.

a. Rumus suku ke-n barisan aritmetika tersebut adalah

$a + (n-1)\,b$

$U_n = 5 + (n-1)(-7)$

$= 5 - 7n + 7$

$= 12 - 7n$

b. Suku ke-25 barisan aritmetika tersebut adalah

$U_{25} = 12 - 7 \cdot 25$

$= 12 - 175$

$= -163$

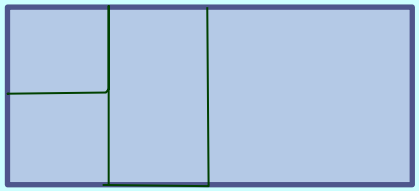
BARISAN DAN DERET GEOMETRI



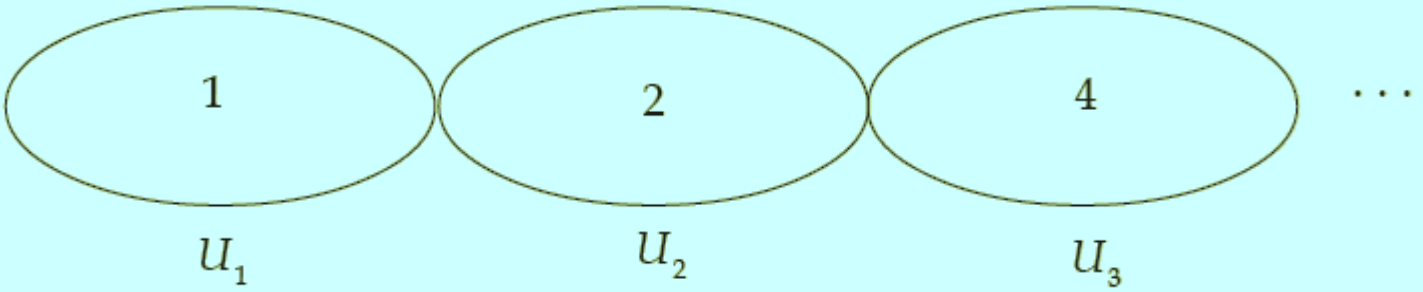
Barisan geometri adalah suatu barisan dengan pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Ada selembar kertas biru, akan dipotong-potong menjadi dua bagian.





perhatikan bagian kertas tersebut yang membentuk sebuah barisan bilangan.



Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = 2$.

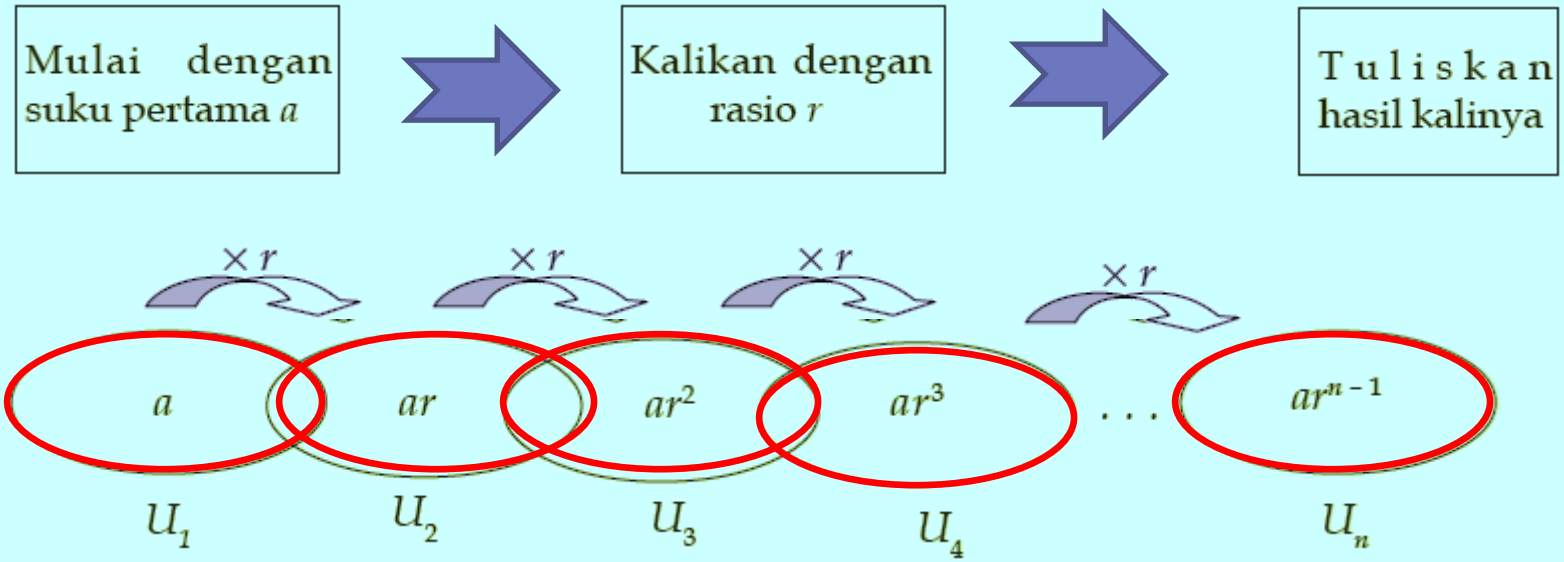
Tampak bahwa, perbandingan setiap dua suku berurutan pada barisan tersebut selalu tetap. Barisan bilangan seperti ini disebut **barisan geometri** dengan perbandingan setiap dua suku berurutannya dinamakan rasio (r).

Barisan geometri adalah suatu barisan dengan pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.
Bentuk umum:

$$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n \text{ atau}$$
$$a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$$

Pada barisan geometri, berlaku $\frac{U_n}{U_{n-1}} = r$ sehingga $U_n = r\, U_{n-1}$

Jika kalian memulai barisan geometri dengan suku pertama a dan rasio r maka kalian mendapatkan barisan berikut.



Suku ke-n barisan Geometri adalah :

$$Un = ar^{n} - 1$$

BARISAN DAN DERET GEOMETRI

Hubungan suku-suku barisan geometri
Seperti dalam barisan Aritmatika hubungan antara suku yang satu dan suku yang lain dalam barisan geometri dapat dijelaskan sebagai berikut:

Ambil U_{12} sebagai contoh :

$U_{12} = a.r^{11}$

$U_{12} = a.r^9.r^2 = U_{10}.\ r^2$

$U_{12} = a.r^8.r^3 = U_9.\ r^3$

$U_{12} = a.r^4.r^7 = U_5.\ r^7$

$U_{12} = a.r^3.r^8 = U_4.r^8$

Secara umum dapat dirumuskan bahwa :

$$U_n = U_k.\ r^{n-k}$$

Deret geometri adalah jumlah suku-suku dari barisan geometri.

Bentuk umum:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n \text{ atau}$$
$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r| < 1$$

Diketahui barisan 27, 9, 3, 1, . . . Tentukanlah:

a. rumus suku ke-n

b. suku ke-8

Jawab :

Rasio dua suku berurutan pada barisan 27, 9, 3, 1, . . . adalah tetap, yaitu $r = \frac{1}{3}$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan geometri.

a. Rumus suku ke-n barisan geometri tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_n &= 27 \cdot (\tfrac{1}{3})^{n-1} \\ &= 3^3 (3^{-1})^{n-1} \\ &= 3^3 \cdot 3^{-n+1} \\ &= 3^{4-n} \end{aligned}$$

b. Suku ke-8 barisan geometri tersebut adalah

$$\begin{aligned} U_8 &= 3^{4-8} \\ &= 3^{-4} \\ &= \frac{1}{81} \end{aligned}$$

Deret Geometri tak hingga

Deret geometi tak hingga adalah deret geometri yang banyak suku-sukunya tak hingga.

Jika deret geometri tak hingga dengan -1 < r < 1 , maka jumlah deret geometri tak hingga tersebut mempunyai limit jumlah (konvergen).

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Untuk n = ∞ , r^n mendekati 0

Sehingga S_∞ = $\frac{a}{1-r}$

Dengan S_∞ = Jumlah deret geometri tak hingga

a = Suku pertama

r = rasio

Jika r ≤ -1 atau r ≥ 1 , maka deret geometri tak hingganya akan divergen, yaitu jumlah suku-sukunya tidak terbatas

Contoh :

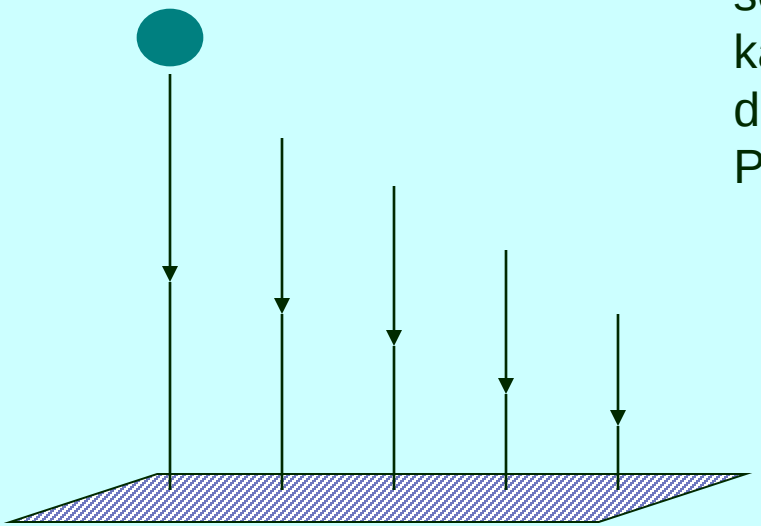
1. Hitung jumlah deret geometri tak hingga : 18 + 6 + 2 + ⋯ · ·

Jawab :

a = 18 ; $r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{3}$

$$s_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = 27$$

2. Sebuah bola elastis dijatuhkan dari ketinggian 2m. Setiap kali memantul dari lantai, bola mencapai ketinggian ¾ dari ketinggian sebelumnya. Berapakah panjang lintasan yang dilalui bola hingga berhenti ?



Lihat gambar di samping!
Bola dijatuhkan dari A, maka AB dilalui satu kali, selanjutnya CD, EF dan seterusnya dilalui dua kali. Lintasannya membentuk deret geometri dengan a = 3 dan r = ¾
Panjang lintasan = $2\,S_\infty - a$

$$= 2\left(\frac{a}{1-r}\right) - a$$

$$= 2\left(\frac{2}{1-\frac{3}{4}}\right) - 2$$

$$= 2\left(\frac{2}{\frac{1}{4}}\right) - 2 \quad = 14$$

Jadi panjang lintasan yang dilalui bola adalah14 m



TERIMA KASIH

TERIMA KASIH