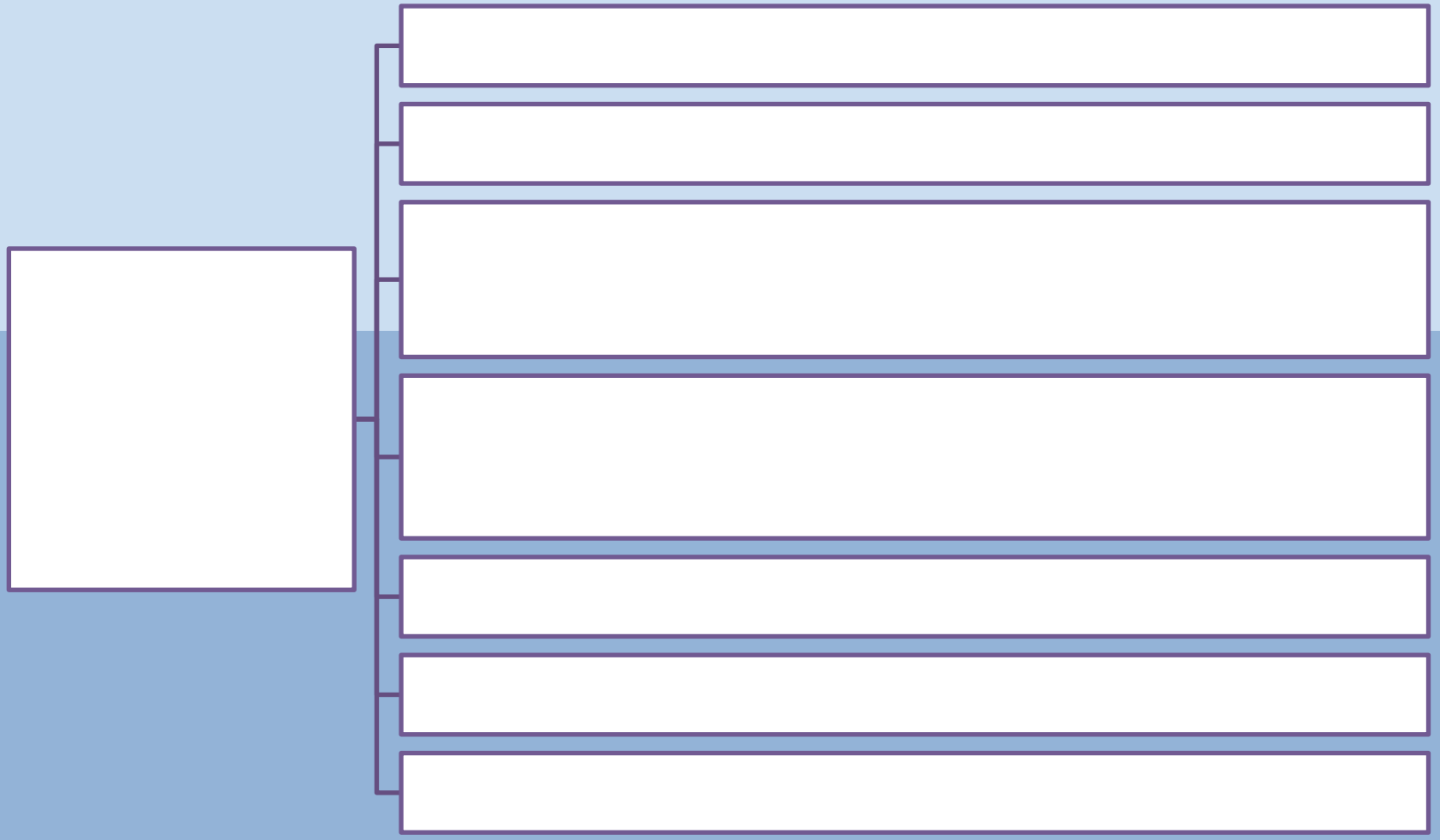


PERSAMAAN KUADRAT

Sumber: *Majalah Griya Asri (modifikasi penulis)*

PETA KONSEP



2.1 Pengertian Persamaan Kuadrat



Seorang pemain golf memukul bola dengan kecepatan 40 m/*s* sehingga bola melambung ke udara. Tinggi *h* meter bola setelah *t* detik dilambungkan dipengaruhi oleh gaya gravitasi bumi, yaitu $g = 10$ m/s^2 sehingga diperoleh rumus $h = 40t - 5t^2$, di mana $5t^2$ diperoleh dari $\frac{1}{2}gt^2$. Jika ketinggian bola mencapai 35 meter, dapatkah kalian menentukan waktu yang dibutuhkan bola untuk mencapai ketingian tersebut?

2.1 Pengertian Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat dalam x secara umum dapat ditulis dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a, b, c \in R$ (bilangan real atau nyata) dan $a \neq 0$. Dengan demikian, bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ merupakan bentuk umum atau bentuk baku persamaan kuadrat dengan a sebagai koefisien x^2, b sebagai koefisien x, dan c adalah konstanta.

Bentuk umum atau bentuk persamaan kuadrat dalam x adalah **αx2 + bx + c = 0** dengan α ≠ 0 dan α, b, c ∈ *R* (bilangan real atau nyata).

2.2 Akar atau Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Menentukan akar atau penyelesaian persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ artinya mencari nilai x yang memenuhi persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ sehingga persamaan tersebut menjadi kalimat (pernyataan) yang benar.

Untuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$,
pengganti-pengganti variabel x yang dicari harus memenuhi syarat jika disubstitusikan pada persamaan tersebut menjadi kalimat benar. Pengganti-pengganti variabel *x* yang demikian disebut **akar** atau **penyelesaian** dari persamaan kuadrat.

2.2 Akar atau Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Contoh Soal

Tunjukkan akar persamaan berikut!

$x_1 = 7$ dan $x_2 = -7$ merupakan akar-akar persamaan $x^2 - 49 = 0$

Jawab:

Nilai $x_1 = 7$ disubstitusikan pada persamaan $x^2 - 49 = 0$, diperoleh:

$72 - 49 = 49 - 49 = 0$ (benar)

Nilai $x_2 = -7$ disubstitusikan pada persamaan $x^2 - 49 = 0$, diperoleh:

$(-7)2 - 49 = 49 - 49 = 0$ (benar)

Oleh karena pada substitusi $x1 = 7$ dan $x_2 = -7$ menghasilkan kalimat benar, maka $x_1 = 7$ dan $x_2 = -7$ adalah akar-akar dari persamaan $x^2 - 49 = 0$.

Kerjakan Latihan 1 halaman 46

2.3 Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Kalimat Terbuka *pq=0*

Sebelum membahas cara menyelesaikan persamaan kuadrat dengan memfaktorkan, terlebih dahulu selidikilah hal-hal berikut!

a. Jika $q \neq 0$, berapakah pengganti p agar $pq = 0$ menjadi kalimat yang benar?
   Jawab: $p = 0$

b. Jika $p \neq 0$, berapakah pengganti q agar $pq = 0$ menjadi kalimat yang benar?
   Jawab: $q = 0$

c. Jika $p = 0$ dan $q = 0$, apakah $pq = 0$ dapat menjadi kalimat yang benar?
   Jawab: ya

Berdasarkan ketiga hal di atas, maka dapat disimpulkan bahwa jika p dan q sembarang bilangan nyata dan $pq = 0$, maka $p = 0$, atau $q = 0$, atau p dan q kedua-duanya adalah 0. Kalimat $p = 0$, atau $q = 0$, atau $p = 0$ dan $q = 0$, dalam matematika dapat ditulis $p = 0$ atau $q = 0$. Kata atau di sini berarti boleh salah satu bernilai 0 atau kedua-duanya bernilai 0.

2.3 Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Kesimpulan dari penelaahan di atas akan kita gunakan sebagai tahapan penting dalam menyelesaikan persamaan kuadrat dengan **cara memfaktorkan.**

Berdasarkan uraian tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Untuk sembarang bilangan real p dan q, selalu berlaku:
Jika p, q $\in R$ dan $pq = 0$, maka $p = 0$ atau $q = 0$.

2.3 Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Contoh Soal

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut!

1. $2(x + 5) = 0$
2. $4x(2x - 3) = 0$

Jawab:

1. $2(x + 5) = 0$

   $\Leftrightarrow x + 5 = 0$

   $\Leftrightarrow x = -5$

   Penyelesaiannya adalah x = –5.

$2\underbrace{(x + 5)}_{q} = 0$

p

2. $4x(2x - 3) = 0$

   $\Leftrightarrow 4x = 0$ *atau* $2x - 3 = 0$

   $\Leftrightarrow x = 0 \qquad 2x = 3$

   $x = 11/2$

$\underbrace{4x}_{p}\underbrace{(2x - 3)}_{q} = 0$

Penyelesaiannya adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = 11/2$.

Kerjakan Latihan 2 halaman 47-48

2.3 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Pada persamaan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, jika bentuk bentuk $ax^2 + bx + c$ dapat difaktorkan, maka persamaan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselesaikan dengan cara memfaktorkan bentuk $ax^2 + bx + c$. Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara **memfaktorkan** dilakukan dengan menggunakan sifat berikut.

Jika $p, q \in R$ dan $pq = 0$, maka $p = 0$ atau $q = 0$.

Sifat di atas dapat digunakan setelah bentuk $ax^2 + bx + c$ difaktorkan di mana bilangan di ruas kanan harus nol.

2.3 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Contoh Soal

Tentukan penyelesaian dari persamaan $(3x + 1)(x - 1) = (2x - 2)^2$!

Jawab:

$$(3x + 1)(x - 1) = (2x - 2)^2$$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3x + x - 1 = 4x^2 - 2(2x)(2) + 2^2$ ⟵ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x - 1 = 4x^2 - 8x + 4$

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x^2 - 2x + 8x - 1 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 6x - 5 = 0$ ⟵ *bentuk umum persamaan kuadrat*

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 = 0$ ⟵ *kedua ruas dikali –1*

$\Leftrightarrow \quad (x - 5)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 5 = 0$ *atau* $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = 5$ *dan* $x_2 = 1$

Akar atau penyelesaiannya adalah $x_1 = 5$ dan $x_2 = 1$.

Himpunan penyelesaiannya adalah {5, 1} atau {1, 5}.

Kerjakan Latihan 3 halaman 51

2.4 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Bentuk Kuadrat Sempurna

Bentuk $ax^2 + bx + c$ tidak selalu dapat difaktorkan. Oleh karena itu, perlu dipelajari *cara lain* untuk menyelesaikan persamaan $ax^2 + bx + c = 0$. Pada bahasan ini, akan kita pelajari cara lain dalam menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu dengan melengkapkan Kuadrat sempurna. Bentuk-bentuk seperti $(x + 7)^2$, $(2y – 3)^2$, dan $(p + 13)^2$ merupakan contoh-contoh dari bentuk kuadrat sempurna.

2.4 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Bentuk Kuadrat Sempurna

Jika suatu persamaan memiliki bentuk kuadrat sempurna seperti $x^2 = q$ atau $(x + p)^2 = q$, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat berikut.

1. Hasil pengkuadratan dari dua bilangan nyata yang berlawanan tandanya adalah bilangan positif yang sama.
2. Jika persamaan berbentuk $x^2 = p$, maka penyelesaiannya dapat ditentukan dengan cara berikut.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= p \\
x^2 - p &= 0 \\
x^2 - (\sqrt{p})^2 &= 0 \quad \longleftarrow (\sqrt{p})^2 = \sqrt{p} \times \sqrt{p} = p \\
(x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}) &= 0 \\
(x - \sqrt{p}) = 0 \quad &\text{atau} \quad (x + \sqrt{p}) = 0 \\
x = \sqrt{p} \quad &\text{atau} \quad x = -\sqrt{p}
\end{aligned}
$$

2.4 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Akar dan Persamaan

Dengan menggunakan sifat-sifat di atas, persamaan yang memiliki *bentuk kuadrat sempurna* dapat diselesaikan dengan menggunakan kesimpulan berikut.

$$X^2 = q \iff x = \pm \sqrt{q}.$$

$$(x + p)^2 = q \iff x + p = \pm\sqrt{q}$$

$\pm\sqrt{q}$ artinya adalah $+\sqrt{q}$ atau $-\sqrt{q}$.

2.4 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Contoh Soal

Tentukan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut.

1. $x^2 - 5 = 0$ 2. $x^2 + 4 = 0$

Jawab:

1. $x^2 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 5$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Penyelesaiannya adalah $x_1 = \sqrt{5}$ dan $x_2 = -\sqrt{5}$.

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$.

2. $x^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = -4$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4}$

Oleh karena $\sqrt{-4} \notin R$, maka persamaan tersebut *tidak* mempunyai penyelesaian.

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{\ \}$.

Kerjakan Latihan 4 halaman 54

2.4 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna, persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ harus dinyatakan dalam bentuk $(x + p)^2 = q$.

Mencari penyelesaian x dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut.

1. Koefisien x^2 adalah 1, atau dibuat menjadi 1.
2. Persamaan dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{x^2 + mx = n}$.
3. Kedua ruas persamaan ditambah dengan **kuadrat dari (koefisien x)**.
4. Persamaan dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{(x + p)^2 = q}$.

2.4 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Contoh Soal

Tentukan penyelesaian dari persamaan $x^2 + 6x = 16$ dengan melengkapkan kuadrat sempurna!

Jawab:

$x^2 + 6x = 16$

Kedua ruas ditambah dengan $(1/2$ dari $6)^2$.

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + (1/2 \text{ dari } 6)^2 = 16 + (1/2 \text{ dari } 6)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 16 + 3^2$

Ruas kiri dinyatakan sebagai kuadrat sempurna.

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 25$

$\Leftrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow x + 3 = \pm 5$

$\Leftrightarrow x = -3 + 5$

$\Leftrightarrow x = -3 + 5$ atau $x = -3 - 5$

$\Leftrightarrow x = 2 \quad x = -8$

Kerjakan Latihan 5 halaman 56

2.5 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Rumus

Rumus Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$ dapat dicari penyelesaiannya
dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna,
sehingga diperoleh penyelesaian untuk x yang dapat digunakan secara umum.

Berikut adalah rumus penyelesaian persamaan kuadrat lebih dikenal dengan istilah rumus *abc*.

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$$

2.5 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Rumus

Diskriminan

Akar-akar persamaan kuadrat bergantung pada nilai $(b^2 - 4ac)$. Dengan demikian, nilai dari $(b^2 - 4ac)$ menjadi pembeda, apakah suatu persamaan kuadrat memiliki dua akar yang berbeda atau dua akar kembar. Oleh karena itu, $(b^2 - 4ac)$ disebut **diskriminan**, biasanya dinyatakan dengan D sehingga $D = (b^2 - 4ac)$.

Diskriminan dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah ***D = (b² -4ac).***

- Jika $D > 0$, maka persamaan memiliki ***dua akar*** yang ***berbeda***.
- Jika $D = 0$, maka persamaan memiliki ***dua akar*** yang ***sama***.
- Jika $D < 0$, maka persamaan ***tidak*** memiliki ***akar*** (penyelesaian)

2.5 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Rumus

Contoh Soal

Tentukan penyelesaian dari persamaan $2x^2 + 5x - 3 = 0$ berikut dengan menggunakan rumus.

Jawab:

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

Berdasarkan bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$, maka: $a = 2$, $b = 5$, dan $c = -3$.

$$x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} / 2a$$
$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(-3)} / 2(2)$$
$$x = -5 \pm 7 / 4$$

$x_1 = -5 + 7/4$ dan $x_2 = -5 - 7/4$

Penyelesaiannya adalah $x_1 = 1/2$ dan $x_1 = 3$.

Kerjakan Latihan 6 halaman 61

2.6 Menyusun Persamaan Kuadrat

Sifat Akar Persamaan Kuadrat

Hubungan antara sifat akar persamaan kuadrat $(x1 + x2)$ dan $(x1 \times x2)$ dengan bentuk umum persamaan kuadrat, yaitu:

- Hasil penjumlahan akar-akar persamaan $ax2 + bx + c = 0$ adalah $-b/a$.
- Hasil perkalian akar-akar persamaan $ax2 + bx + c = 0$ adalah c/a .

Jika akar-akar dari persamaan ax2 + bx + c = 0 adalah x1 dan x2, maka berlaku sifat-sifat berikut:

- $X_1 + x_2 = -b/a$
- $X_1 \times x_2 = c/a$



2.6 Menyusun Persamaan Kuadrat

Menyusun Persamaan Kuadrat

Menyusun persamaan kuadrat merupakan kebalikan dari menyelesaikan persamaan kuadrat. Jika akar-akar dari persamaan $x^2 + b/a\,x + c/a = 0$ adalah x_1 dan x_2, maka hubungan *x* terhadap akar-akar tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $x - x_1 = 0$ dan $x - x_2 = 0$. Kedua bentuk aljabar ini dapat dirangkai menjadi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ yang merupakan bentuk rumus untuk membentuk persamaan kuadrat.

Jika akar-akar suatu persamaan kuadrat adalah x_1 dan x_2, maka untuk menyusun persamaan kuadrat tersebut digunakan rumus berikut.

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

2.6 Menyusun Persamaan Kuadrat

Contoh Soal

Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 7 dan –4.

Jawab:

i) *Menggunakan rumus* $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$x_1 = 7$ dan $x_2 = -4$.

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$(x - 7)(x + 4) = 0$

$x^2 + 4x - 7x - 28 = 0$

$x^2 - 3x - 28 = 0$

Jadi, persamaan kuadrat yang akar-akarnya 7 dan –4 adalah $x^2 - 3x - 28 = 0$.

ii) *Menggunakan sifat akar persamaan*

- $x_1 + x_2 = 7 + (-4)$

$-b/a = 3 \rightarrow b/a = -3$

- $x_1 \times x_2 = 7 \times (-4)$

$c/a = -28$

Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 7 dan –4 adalah $x\uparrow 2 + b/a\, x + c/a = 0, x\uparrow 2 - 3x - 28 = 0$

Kerjakan Latihan 7 halaman 67

2.7 Model Matematika dan Penerapan Persamaan Kuadrat

Model Matematika

Untuk menyelesaikan soal cerita dengan situasi seperti di atas, terlebih dahulu perlu dibuat *kalimat matematika* berdasarkan informasi yang terdapat pada soal tersebut, yang disebut dengan ***model matematika***. Model matematika dari situasi tersebut dapat diperoleh dengan cara memulai dengan *pemisalan* untuk besaran yang belum diketahui dengan *sebuah variabel*, misalnya *x*.

2.7 Model Matematika dan Penerapan Persamaan Kuadrat

Penerapan Persamaan Kuadrat pada Soal Cerita

Mengacu pada uraian dan contoh pada model matematika, maka soal-soal yang menyangkut persamaan kuadrat *umumnya* dapat diselesaikan dengan langkah-langkah berikut.

1. Salah satu besaran yang belum diketahui *dimisalkan* dengan x (atau variabel lainnya), kemudian besaran yang lain dinyatakan dalam bentuk *kalimat matematika* yang dikaitkan dengan pemisalan yang memuat variabel x (atau variabel lainnya).
2. Membuat model matematika berupa persamaan kuadrat dalam x (atau variabel lainnya), kemudian menyelesaikan persamaan tersebut dengan menggunakan konsep-konsep dan sifat-sifat persamaan yang telah dipelajari.
3. Menentukan penyelesaian yang *memenuhi* (mungkin hanya satu penyelesaian, mungkin juga kedua-duanya).
4. Menjawab soal sesuai dengan yang ditanyakan.

2.7 Model Matematika dan Penerapan Persamaan Kuadrat

Contoh Soal

Dua buah bilangan cacah berselisih 3 dan hasil kalinya 88. Tentukan kedua bilangantersebut.

Jawab:
Misal bilangan pertama = x,
maka bilangan kedua = $(x + 3)$ atau $(x – 3)$.

- Persamaannya: $x(x + 3) = 88$
  $\Leftrightarrow x^2 + 3x – 88 = 0$
  $\Leftrightarrow (x – 8)(x + 11) = 0$
  $\Leftrightarrow x – 8 = 0$ *atau* $x + 11 = 0$
  $\Leftrightarrow x = 8$ $x = –11$
- Untuk $x = 8$, maka bilangan pertama = 8, bilangan kedua = 8 + 3 = 11.
  Untuk $x = –11$ *tidak memenuhi*, sebab –11 bukan bilangan cacah.
  Jadi, kedua bilangan cacah tersebut adalah 8 dan 11.

Kerjakan Latihan 8 halaman 71